

ӘЛ-ФАРАБИ АТЫНДАҒЫ ҚАЗАҚ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ
Физика-техникалық факультет
Электроника және астрофизика кафедрасы

Алимгазина Н.Ш.

Электр тізбектер теориясы -1

пәні бойынша дәрістер жинағы

«Радиотехника, электроника және телекоммуникациялар» мамандығы
бойынша білім алушы студенттерге арналған

Алматы, 2025

11-дәріс. Синусоидальды емес ток тізбектері

Дәрістің мақсаты. Синусоидальды емес токтар мен кернеулердің физикалық мәнін, олардың сипаттамаларын және Фурье қатары арқылы талдау әдістерін меңгеру; синусоидальды емес ток тізбектеріндегі қуатты және есептеу тәсілдерін үйрену.

Жоспар

1. Негізгі ұғымдар
2. Фурье қатарлары арқылы синусоидальды емес шамаларды бейнелеу
3. Синусоидальды емес шамалардың сипаттамалары
4. Синусоидальды емес токтың периодты қисықтарының симметрия қасиеттері
5. Синусоидальды емес ток тізбегіндегі қуат
6. Синусоидальды емес ток тізбектерін есептеу

1. Негізгі ұғымдар

Алдыңғы дәрістер синусоидальды ток пен кернеудің әсер етуі кезіндегі сызықты электр тізбектері қарастырылды. Шындығында бұл шамалар үлкен немесе кіші деңгейде синусоидальды емес бола алады. Себебі нақты ток пен кернеулер генераторлары сигналдарды қатаң синусоидальды пішінімен әрдайым қамтамасыз етпейді. Сонымен қатар, тізбекте идеалды синусоидальды кернеу немесе ЭҚК көзі болса да бейсызықты сипаттамалары бар элементтерінің әсерінен ток пішіндерінің бұрмалануы болады (1 сурет).



1-сурет. ЭТ-терінде синусоидальды емес токтар мен кернеулердің пайда болу себептері

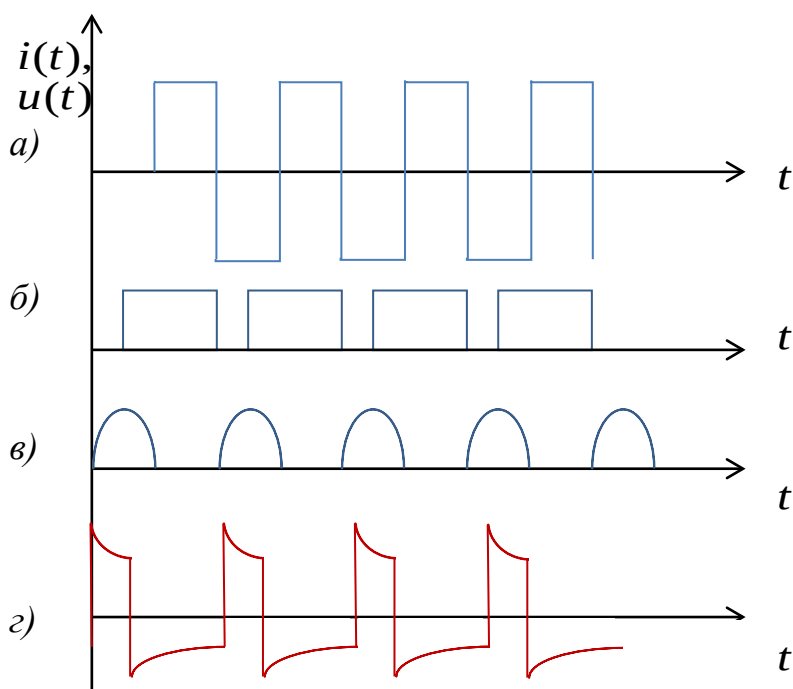
Практикада кернеу мен токтардың синусоидальды емес болуын екі түрлі көз-қараспен қарауға болады:

✓ Бірінші жағдай - теріс жағы: жалпы жағдайда күш электроэнергетикасындағы синусоидальды емес токтар қуаттың шығындалуына, электр қозғалтқыш білігінің пульсацияларына әкеледі, байланыс желісінде бөгеттерді тудырады, сондықтан синусоидальды режимдерді қалыпта ұстаған абзал;

✓ Екінші жағдай - оң жағы: автоматика және байланыс тізбектерінде электртехникалық құрылғылардың әрекет принципі негізінде синусоидалды емес токтар пен кернеулер болып табылса, оларды күшейту мен барынша аз мәнде бұрмаланумен жеткізу мақсаты көзделген.

Синусоидалды емес токтар пен кернеулердің уақытқа тәуелділігі *периодты, периодтыға жуық және периодты емес* болуы мүмкін. Осы дәрісте уақыттық диаграммаларында симметриялық қасиеттерге ие бола алатын периодты синусоидалды емес токтар мен кернеулерді қарастырамыз (2 сурет).

Периодты синусоидалды емес ток пен кернеу деп уақыт бойынша периодты синусоидалды емес заңымен өзгеретін ток пен кернеуді атаймыз.



2- сурет. Периодты синусоидалды емес шамалар (ток немесе кернеу): а, б, в - симметриялы; г – симметриялы емес

Синусоидалды емес токтар пайда болатын ЭТ келесі негізгі жұмыс режимдерін қарастырады:

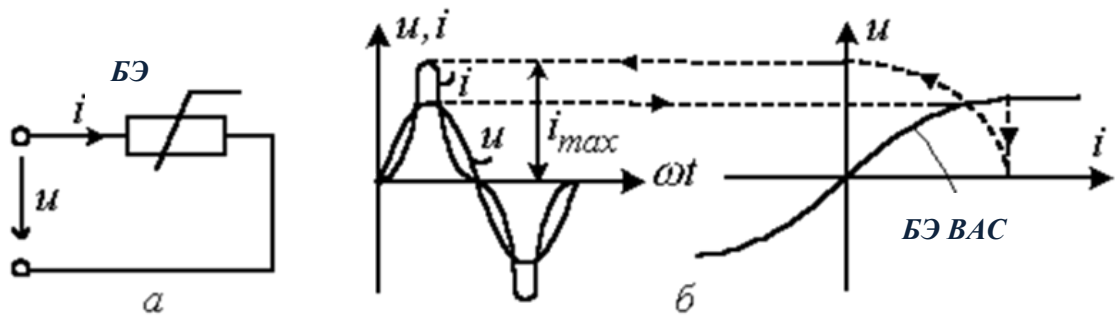
1. Егер ЭҚК көзі (немесе ток көзі) синусоидалды емес ЭҚК-ті (немесе токты) берсе және барлық ЭТ элементтері (резистивті, индуктивті және сыйымдылықты) сызықты болса;

2. Егер ЭҚК көзі (немесе ток көзі) синусоидалды ЭҚК-ті (немесе токты) берсе және тізбектің бір немесе бірнеше элементі (резистивті, индуктивті және сыйымдылықты) – бейсызықты болса;

3. Егер ЭҚК көзі (немесе ток көзі) синусоидалды емес ЭҚК-ті (немесе токты) берсе және тізбектің бір немесе бірнеше элементі (резистивті, индуктивті және сыйымдылықты) – бейсызықты болса;

4. Егер ЭҚК көзі (немесе ток көзі) тұрақты немесе синусоидалды ЭҚК-ті (немесе токты) берсе және тізбектің бір немесе бірнеше элементі (резистивті, индуктивті және сыйымдылықты) – уақыт бойынша периодты

заңдылығымен өзгерсе, сонда осындай ЭТ жұмыс режимінде синусоидалды емес токтар мен кернеулер пайда болады.



3-сурет. 2 пунктке сәйкес келетін ЭТ жұмыс режимі: электр схемасы (а), уақыттық диаграммасы және тізбектегі элементтің ВАС (б)

2. Фурье қатары арқылы синусоидалды емес шамаларды бейнелеу

Толық период ішінде максимум, минимум және бірінші текті үзілістердің шектеулі мәндеріне ие болатын кез-келген $f(x)$ периодты синусоидалды емес функцияны Фурье қатарына жіктеуге болады.

Егер x айнымалы шама t уақытпен $x = \omega t = \frac{2\pi t}{T}$ қатынасымен байланысса, (T - период), сонда x айнымалы шамасы бойынша функцияның периоды 2π тең, ал t уақыт бойынша осы функцияның периоды T тең болады.

$$f(x) = A_0 + A'_1 \sin(x) + A'_2 \sin(2x) + A'_3 \sin(3x) + \dots \\ \dots + A''_1 \cos(x) + A''_2 \cos(2x) + A''_3 \cos(3x) + \dots, \quad (1)$$

мұндағы A_0 - тұрақты құраушы немесе нөлдік гармоника, A'_1 - бірінші гармониканың синусты («синус» заңы бойынша өзгертін) құраушысының амплитудасы, A''_1 - бірінші гармониканың косинусты («косинус» заңы бойынша өзгертін) құраушысының амплитудасы.

Мұндағы

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx; \quad (2)$$

$$A'_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(x) dx, \dots A'_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx; \quad (3)$$

$$A''_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(x) dx, \dots A''_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx. \quad (4)$$

A'_k және A''_k - Фурье қатарының коэффициенті деп аталады.

$$A'_k \sin(kx) + A''_k \cos(kx) = A_k \sin(kx + \psi_k), \quad (5)$$

болғандықтан, осында

$$A_k = \sqrt{(A'_k)^2 + (A''_k)^2}, \quad (6)$$

$$\operatorname{tg}(\psi_k) = \frac{A''_k}{A'_k}. \quad (7)$$

A_k амплитудаларының және ψ_k бастапқы фазаларының жиынтықтарын **амплитудалы және фазалық жиіліктік спектрлері**, ал A'_k және A''_k коэффициенттерінің жиынтығын – **функцияның жиіліктік спектрі** деп атайды.

Сонда (1) Фурье қатарын келесідегідей түрде жазуға болады:

$$\begin{aligned} f(x) &= A_0 + A_1 \sin(x + \psi_1) + A_2 \sin(2x + \psi_2) + \dots \\ f(x) &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(kx + \psi_k), \end{aligned} \quad (8)$$

мұндағы A_k - Фурье қатарының k - гармоникасының амплитудасы. $k=1$ болған кезде Фурье қатарын құраушысы $f(x)$ функциясының жиілігіне тең жиілікке ие болады және *бірінші* немесе *негізгі гармоника* деп аталады.

Егер $k=2n$, $n=1,2,3,\dots$ - жұп сандары болса, сонда гармоникаларды - **жұп** және $k=2n+1$, $n=0,1,2,\dots$ - тақ сандар болса, сонда гармоникаларды – **тақ** деп атайды.

3. Синусоидалды емес шамалардың сипаттамалары

Айнымалы синусоидалды емес токтар мен кернеулердің негізгі сипаттамалары:

1. Синусоидалды емес токтың (немесе кернеудің) **максималды мәні** - $i_{\max}$.

2. Синусоидалды емес токтың (немесе кернеудің) **әсерлік мәні**

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}. \quad (9)$$

Егер $i(t) = \sum_{k=0}^{\infty} I_{km} \sin(k\omega t + \psi_k)$ болса, сонда (9) мына түрді қабылдайды

$$I^2 = I_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} I_{km}^2,$$

$$I_k = \frac{I_{km}}{\sqrt{2}} \text{ кезінде} \quad I = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} I_k^2}. \quad (10)$$

3. Синусоидалды емес токтың (немесе кернеудің) **модуль бойынша орташа мәні**

$$I_{opt} = \frac{1}{T} \int_0^T |i| dt. \quad (11)$$

4. Синусоидалды емес токтың (немесе кернеудің) **период бойынша орташа мәні**

$$I_0 = \frac{1}{T} \int_0^T i dt. \quad (12)$$

5. **Амплитуда коэффициенті** – синусоидалды емес токтың (немесе кернеудің) максималды мәнінің әсерлік мәніне қатынасы

$$K_A = \frac{i_{\max}}{I}. \quad (12)$$

6. **Форма коэффициенті** – синусоидалды емес токтың әсерлік мәнінің модулі бойынша орташа мәніне қатынасы

$$K_\Phi = \frac{I}{I_{opt}}. \quad (14)$$

7. **Бұрмалану коэффициенті** – бірінші гармониканың әсерлік мәнінің айнымалы шаманың әсерлік мәніне қатынасы

$$K_B = \frac{I_1}{I}. \quad (15)$$

8. **Гармоника коэффициенті** – жоғарғы гармоникалардың әсерлік мәндерінің бірінші гармониканың әсерлік мәніне қатынасы -

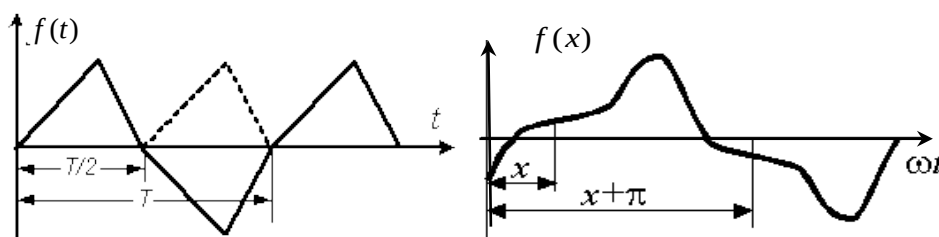
$$K_\Gamma = \frac{\sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} I_k^2}}{I_1}. \quad (16)$$

4. Синусоидалды емес токтың периодты қисықтарының симметрия қасиеттері

Стандартты функция үшін Фурье қатарының коэффициенттері анықтама әдебиеттен немесе жалпы жағдайда жоғарыда көрсетілген формулалар арқылы есептеп алуға болады. Бірақ симметрия қасиеттеріне ие қисықтар болған жағдайда есеп жеңілдетіледі, себебі олардың жіктеулерінен бірнеше

гармоникалардың спектрлері есептелінбейді. Периодты заңына бағынатын синусоидалды емес ток қисықтары келесі симметрия қасиеттеріне ие болады:

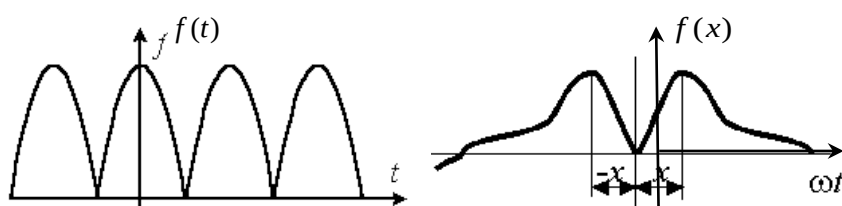
1. Егер периодты синусоидалды емес ток уақыттық диаграммада қисық түрінде бейнеленсе және абсцисса өсіне қатысты симметрия қасиеттеріне ие болса, сонда $f(x) = -f(x + T/2)$ (4-сурет).



4-сурет. Симметриялы қисықтардың үлгісі

Осы кезде функцияны Фурье қатарына жіктеу кезінде теңдеуде A_0 тұрақты құраушысы және A_k ($k = 2n, n = 1, 2, 3, \dots$) жұп гармоникалар болмайды, яғни $A_0 = A_2 = A_4 = A_6 = \dots = 0$.

2. Егер периодты синусоидалды емес ток уақыттық диаграммада қисық түрінде бейнеленсе және ордината өсіне қатысты симметрия қасиеттеріне ие болса, сонда $f(t) = f(-t)$ және функцияны Фурье қатарына жіктеу кезінде теңдеуде A'_k ($k = 1, 2, 3, \dots$) синус құраушылары болмайды, яғни $A'_1 = A'_2 = A'_3 = \dots = 0$.

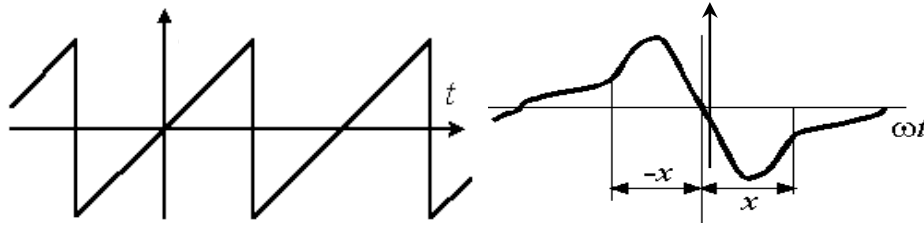


5-сурет. Симметриялы қисықтардың үлгісі

3. Егер синусоидалды емес ток уақыттық диаграммада қисық түрінде бейнеленсе және координата басына қатысты симметрия қасиеттеріне ие болса, сонда $f(t) = f(-t)$ және функцияны Фурье қатарына жіктеу кезінде теңдеуде A_0 тұрақты құраушысы мен A'_k ($k = 1, 2, 3, \dots$) косинус құраушылары болмайды, яғни $A_0 = A'_1 = A'_2 = A'_3 = \dots = 0$.

$f(t)$

$f(x)$



6-сурет. Симметриялы қисықтардың үлгісі

5. Синусоидальды емес ток тізбегіндегі қуат

ЭТ еркін пішіні бар периодты токтың активті қуаты период бойынша орташа қуат арқылы анықтауға болады:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T (u \cdot i) dt. \quad (17)$$

Егер $i(t) = \sum_{k=0}^{\infty} I_{km} \sin(k\omega t + \psi_{I_k})$ - тізбектегі ток және $u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} U_{km} \sin(k\omega t + \psi_{U_k})$ кернеу болса, сонда

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T \left[\sum_{k=0}^{\infty} U_{km} \sin(k\omega t + \psi_{U_k}) \right] \cdot \left[\sum_{k=0}^{\infty} I_{km} \sin(k\omega t + \psi_{I_k}) \right] dt.$$

Өртүрлі жиілікті синусоидальды функциялардың период бойынша орташа мән нөлге тең болғандықтан, соңғы теңдеу келесі түрін қабылдайды

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{k=0}^{\infty} U_{km} I_{km} \sin(k\omega t + \psi_{U_k}) \sin(k\omega t + \psi_{I_k}) dt \rightarrow$$

$$P = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{U_{km} I_{km} \cos(\varphi_k)}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} U_k I_k \cos(\varphi_k), \quad (18)$$

мұнда $\varphi_k = \psi_{U_k} - \psi_{I_k}$. Егер $P_k = U_k I_k \cos(\varphi_k)$ болса, онда

$$P = \sum_{k=0}^{\infty} P_k. \quad (19)$$

Синусоидальды емес токтың орташа қуаты - жеке гармоникалардың орташа қуаттарының қосындысына тең болады.

Осыған ұқсас, егер $Q_k = U_k I_k \sin(\varphi_k)$ болса, реактивті қуат үшін келесі теңдікті аламыз

$$Q_k = \sum_{k=0}^{\infty} Q_k. \quad (20)$$

Синусоидальды емес токтың толық қуаты

$$S = UI = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} U_k^2 \sum_{k=0}^{\infty} I_k^2} = \sqrt{P^2 + Q^2 + T^2} \neq \sqrt{P^2 + Q^2}, \quad (21)$$

мұндағы T - бұрмалану қуаты, ол әртүрлі ретті гармоникалық ток пен кернеудің әсерлік мәндерінің көбейтіндісі ретінде анықталады.

6. Синусоидалды емес ток тізбектерін есептеу

Егер сызықты ЭТ-де синусоидалды емес ток пен кернеудің (ЭҚК) энергия көздері болса, сонда мұндай тізбекті дұрыс есептеу үшін келесі реттілікті сақтаған жөн:

1. Барлық синусоидалды емес токтар мен кернеулерді Фурье қатарына жіктеу қажет. Тұрақты және синусоидалды құраушыларын анықтау керек.

2. Беттесу әдісін қолдана отырып, әр құраушысы үшін токтар мен кернеулерді есептеу керек.

3. Барлық алынған шешімдерді біріктіріп, белгісіз шамаларды анықтау керек.

ЭҚК лездік мәні синусоидалды емес заң бойынша өзгертін кернеу көзі бар ЭТ қарастырайық.

Ең бірінші берілген функцияны Фурье қатарына жіктейміз, тұрақты және синус құраушыларын белгілейміз:

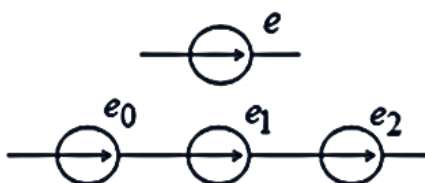
$$e(t) = E_0 + E_{1m} \sin(\omega_1 t + \psi_1) + E_{2m} \sin(\omega_2 t + \psi_2).$$

ЭҚК көзінің әрекеті үш тізбектей жалғанған ЭҚК көздерінің әрекетіне сәйкес келеді:

$$e_0(t) = E_0;$$

$$e_1(t) = E_{1m} \sin(\omega_1 t + \psi_1);$$

$$e_2(t) = E_{2m} \sin(\omega_2 t + \psi_2).$$



7-сурет. Синусоидалды емес ЭҚК тізбектегі көрінісі

Беттесу әдісін қолдана отырып тізбектің әр бөлігіндегі әр ЭҚК-нен бөлшек токтарды анықтаймыз. Сонда k -ші тармақтағы шынайы ток бөлшек токтардың қосындысына тең болады: $i_k = I_{0k} + i_{1k} + i_{2k}$.

Есепті шешу барысында әртүрлі жиілікте индуктивті және сыйымдылықты кедергілер де әртүрлі болатынын ескерген жөн. Олар үшін келесі байланыс қолданылады:

$$X_{Lk} = k\omega L = kX_{L1}, \quad (22)$$

$$X_{Ck} = \frac{1}{k\omega C} = \frac{X_{C1}}{k}. \quad (23)$$

k -ші гармоника үшін индуктивті кедергі k есе үлкен болады, ал сыйымдылықты кедергі бірінші (негізгі) гармоникаға қарағанда k есе кіші болады. Осыдан, синусоидалды емес кернеу көзі бар тізбектегі индуктивті кедергіні арттыру кезінде ток қисығының пішіні «синусоида» пішініне жақын болады. Синусоидалды емес кернеу тізбекке берілсе де, жоғарғы гармоникалық құраушылары болғандықтан, токтың синусоидалды емес пішіні тікелей сыйымдылықты кедергіге тәуелді болады.

Бақылау сұрақтары

1. Синусоидалды емес шамаларға анықтама беріңіз.
2. Фурье қатары арқылы синусоидалды емес шамаларды жазып беріңіз.
3. Синусоидалды емес шамалардың сипаттамаларына анықтама беріңіз.
4. Синусоидалды емес токтардың периодты қисықтарының симметрия қасиеттерін сипаттап беріңіз.
5. Синусоидалды емес ток тізбегіндегі толық қуаттың теңдеуін жазыңыз.
6. Синусоидалды емес ток тізбегін есептеу принципін түсіндіріп беріңіз.

Әдебиеттер тізімі

1. Н.Ш. Алимгазина, А.Б. Манапбаева. Электр тізбектер теориясы. Дәрістер жинағы. – Алматы: Қазақ университеті, 2017. – 228 б.
2. Н.Ш. Алимгазина, С.М. Манаков, А.Б. Манапбаева, А.Ә. Әлібек. «Электр тізбектер теориясы» пәні бойынша есептер жинағы. – Алматы: Қазақ университеті, 2017. – 162 б.
3. Г.В. Зевеке, П.А. Ионкин, А.В. Нетушил, С.В. Страхов. Основы теории цепей: Учеб. для вузов.–8-е изд., перераб. –М., 2020 -528 с.
4. Л.А. Бессонов. Теоретические основы электротехники: Электрические цепи. Учеб. для студентов электротех., энергетич. и приборостроит. спец. вузов. –7-е изд., перераб. и доп. –М.: Высш. шк., 2015. –528 с.